Лабораторна робота 2

Тема: **ПЕРЕТВОРЕННЯ МОДЕЛІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ В MATLAB**

Мета роботи: ознайомитися з методами введення лінійної стаціонарної системи до середовища MATLAB за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox

1 Теоретичні відомості

1.1 Введення моделі систем керування різними способами

Введення моделі лінійної стаціонарної системи (ЛСС) до середовища MATLAB за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox можливе в чотирьох форматах:

1) у вигляді коефіцієнтів чисельників та знаменників передаточних функцій (поліномів);

2) в форматі матриць простору стану;

3) в форматі нулів, полюсів та коефіцієнтів передачі системи;

4) в форматі доданків простих дробів.

1.1.1 Передаточна функція в вигляді поліномів

Один з найпростіших форматів введення моделі у вигляді коефіцієнтів чисельників та знаменників передаточних функцій. Передаточна функція записується в вигляді поліномів чисельника та знаменика.

Даний формат може бути представлений за допомогою пакета Control System Toolbox, наступним чином:

```
>> W=tf([1 -3 2],[1 2 -1 -2]);
>> impulse(W);
>>step(W);
>>bode(W);
```

Отримують аналогічні характеристики попереднім та ЛАЧХ, ЛФЧХ.

Також цей формат може бути представлений за допомогою пакета Simulink представлений на рис.2.1.

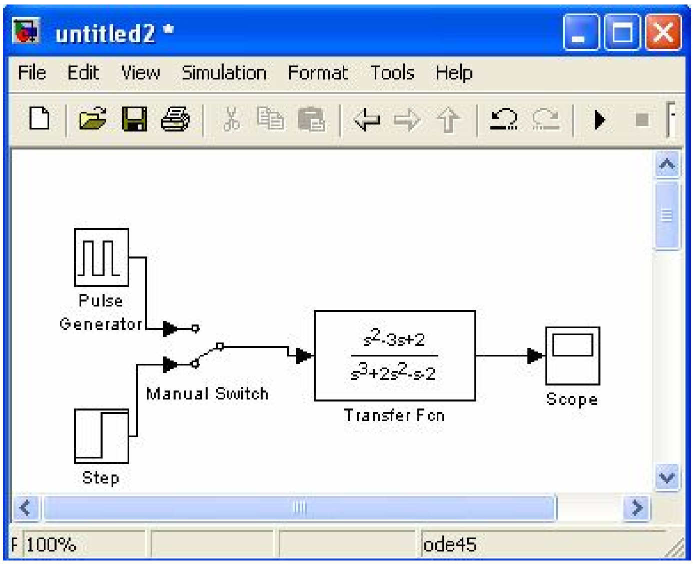

Рис.2.1

В даному випадку на вхід подається одинична ступінчаста дія та одиничну імпульсну дію, а на виході відповідно отримують перехідну та імпульсну характеристику.

1.1.2 Складання системи диференційних рівнянь у просторі стану

Як відомо, будь-яка лінійна система автоматичного керування (або електро-механічна система), поведінка якої може бути описана звичайним диференційним рівнянням порядку **n**, завжди може бути подана математичною моделлю у вигляді системи **n** лінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_1(t) + \ldots b_{1m}u_m(t);\\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_1(t) + \ldots b_{2m}u_m(t);\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_1(t) + \ldots b_{nm}u_m(t).
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

Якщо ввести до розгляду матриці коефіцієнтів

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ \ddots \\ a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix} b_{11}\, b_{12} \cdots b_{1m} \\ b_{21}\, b_{22} \cdots b_{2m} \\ \ddots \\ b_{n1}\, b_{n2} \cdots b_{nm} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

а також вектори

$$\left.\begin{aligned} X(t) &= [x_1(t)\;\; x_2(t) \ldots x_n(t)]^T; \\ U(t) &= [u_1(t)\;\; u_2(t) \ldots u_m(t)]^T, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

то математичну модель (2.1) можна записати у стислій векторно-матричній формі

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \tag{2.4}$$

де **X(t) – n -** вектор стану системи; **U(t) – m -** вектор зовнішніх впливів (керувань); **A** – матриця динаміки системи розміром **n×n** (квадратна); **B –** матриця управління (входу) розміром **n×m** (прямокутна).

Модель системи у просторі стану характеризується також рівнянням виходу:

$$Y(t) = CX(t) + DU(t), \tag{2.5}$$

де **Y(t)** – **r** - вектор виходу системи; **C – (r×n)** - матриця відображення динамічних змінних **X(t)** на вихід системи; **D – (r×m)** - матриця компенсації системи (компенсується похибка у вихідному сигналі системи).

Математичні моделі систем у векторно-матричній формі мають дуже важливе практичне значення. Вони широко використовуються в сучасній теорії автоматичного керування при аналітичному конструюванні регуляторів, розробці оптимальних систем керування, тощо. Векторно-матричний опис дозволяє формалізувати процедури розв'язання багатьох складних задач, що дуже важливо при їх розв'язанні за допомогою ЕОМ.

Даний формат може бути представлений за допомогою пакета Control System Toolbox, наступним чином:

```
>> W=tf([1 -3 2],[1 2 -1 -2]);
>> [A, B, C, D] = ssdata (W)
A =
  -2.0000    0.5000    1.0000
   2.0000         0         0
        0    1.0000         0
B =
    2
    0
    0
C =
   0.5000   -0.7500    0.5000
D =
    0
>> W1=ss(A,B,C,D);
>> step(W1);
>> impulse(W1);
>>bode(W1);
```

Отримують аналогічні характеристики попереднім та ЛАЧХ, ЛФЧХ.

Також цей формат може бути представлений за допомогою пакета Simulink представлений на рис.2.2.

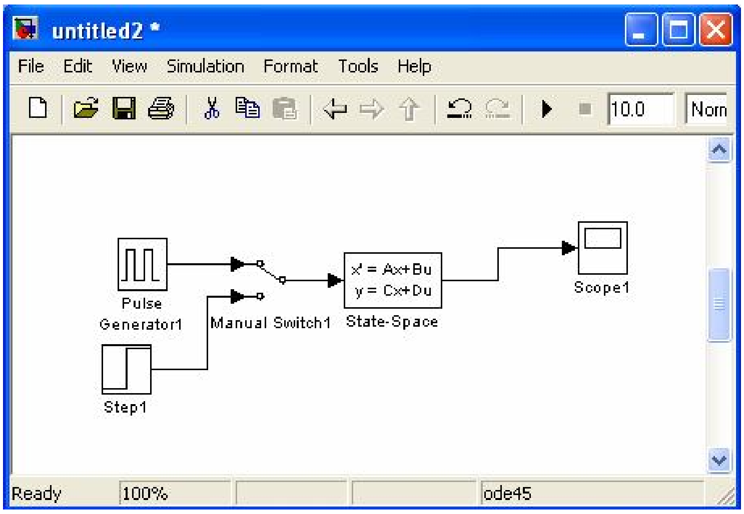

Рис.2.2

В даному випадку на вхід подається одинична ступінчаста дія та одиничну імпульсну дію, а на виході відповідно отримують перехідну та імпульсну характеристику.

1.1.3 Передаточна функція в вигляді нулів та полюсів

Розклав чисельник та знаменник функції передачі (1.2) на множники, отримаємо функцію передачі в наступному вигляді:

$$H(s) = k\frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2})\ldots(s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2})\ldots(p - z_1)} \qquad (2.6)$$

Тут $k = \frac{b_m}{a_n}$ - коефіцієнт посилення (gain), z_i - нулі функції передачі (zero), p_i - полюси функції передачі (pole). В точках нулів $H(z_i) = 0$, а в точках полюсів $H(p_i \to \infty)$.

В даному випадку ланка описується набором параметрів $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, k.

Нулі функції передачі можуть бути дійсними або складають комплексно-спряжені пари. Це ж відноситься до полюсів. Коефіцієнт посилення завжди дійсні.

Даний формат може бути представлений за допомогою пакета Control System Toolbox, наступним чином:

```
>> [z, p, k] = zpkdata (W, 'V')
z =
    2
    1

p =
   1.0000
  -2.0000
  -1.0000

k =
    1
>> W2=zpk(z,p,k)
Zero/pole/gain:
  (s-2) (s-1)
-----------------
(s-1) (s+1) (s+2)
>> step(W2)
>>impulse(W2)
>>bode(W2)
```

Також цей формат за допомогою пакета Simulink представлений на рис.2.3.

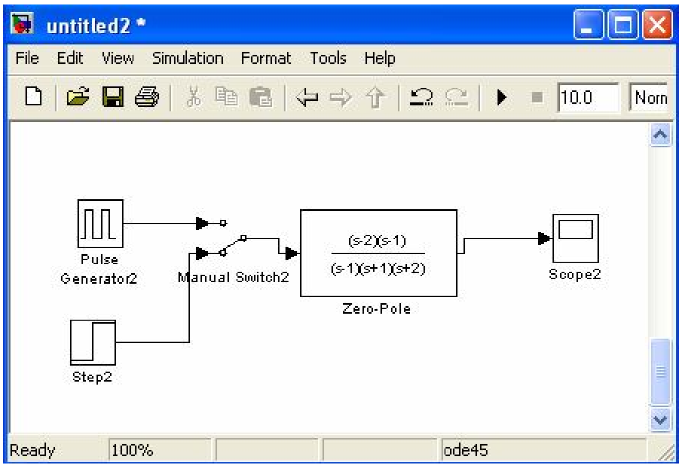

Рис.2.3

В даному випадку на вхід подається одинична ступінчаста дія та одиничну імпульсну дію, а на виході відповідно отримують перехідну та імпульсну характеристику.

1.1.4 Передаточна функція у вигляді доданків простих дробів (полюси та винятки)

Ще одним способом перетворення дрібно-раціональної функції передачі (1.2) є її представлення в вигляді суми простих дробів. При відсутності кратних коренів у знаменнику таке представлення має наступний вигляд:

$$H(s) = \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \frac{r_{n-2}}{s - p_{n-2}} + \ldots + \frac{r_1}{s - p_1} + C_0 \qquad (2.7)$$

Тут p_i - полюси функції передачі, а числа r_i - називаються винятками. C_0 - ціла частина функції передачі, відмінна від нуля тільки в випадку рівності степенів поліномів чисельника та знаменника.

В даному випадку ланка описується набором параметрів $\{z_i\}$, $\{p_i\}$, C_0.

Полюси функції передачі можуть бути дійсними або складати комплексно-спряжені пари. Винятки, відповідно комплексно-спряженим полюсам, також є комплексно-спряженими.

При наявності кратних полюсів функції передачі розклад на прості дроби становиться складніше. Кожен m-кратний полюс p_i дає m доданків наступного виду:

$$\frac{r_{i1}}{s-p_i}+\frac{r_{i2}}{(s-p_i)^2}+\frac{r_{i3}}{(s-p_i)^3}+\ldots+\frac{r_{im}}{(s-p_i)^m}.$$

Даний формат може бути представлений за допомогою пакета Control System Toolbox, наступним чином:

```
>> a=[1 -3 2];
>>  b=[1 2 -1 -2];
>> [r,p,C]=residue(a,b)
r =
    4.0000
    0.0000
   -3.0000
p =
   -2.0000
    1.0000
   -1.0000
C =
     []
>> [a,b]= residue(r,p,C);
>> W3=tf(a,b);
>> step(W3)
```

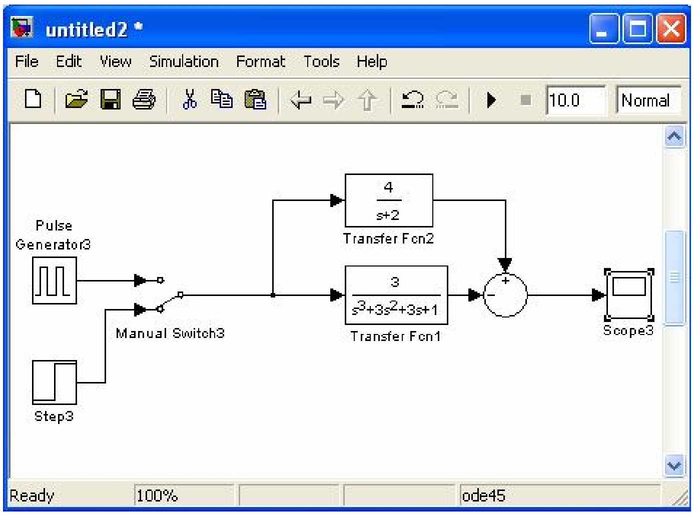

Рис.2.3

Також цей формат за допомогою пакета Simulink представлений на рис.2.3. В даному випадку на вхід подається одинична ступінчаста дія та одиничну імпульсну дію, а на виході відповідно отримують перехідну та імпульсну характеристику.

1.2 Введення моделей систем керування

Традиційно об'єкти керування або системи описують за допомогою передаточних функцій і тому виникає задача переходу до математичної моделі у формі векторно-матричних диференційних рівнянь. Такий перехід від передаточних функцій до простору стану неоднозначний, результат переходу залежить від вектора фазових координат.

До функцій створення LTI-моделей відносяться:

- `ss` – створює модель простору стану на основі заданих матриць A, B,C, D з рівнянь стану системи;
- `dss` – створює модель простору стану на основі опису простору стану більш загального вигляду, коли рівняння змінних стану не вирішені відносно похідних;
- `tf` – створює модель на основі заданих передаточних функцій системи;
- `zpk` – створює модель на основі заданих нулів, полюсів та коефіцієнтів передачі системи;
- `filt` – створює модель на основі дискретних передаточних функцій, заданих в формі поліномів змінної z^{-1};
- `set` – задає значення деяких інших полів LTI-об′єкта (назв входів та виходів, назви системи тощо).

Для отримання окремих характеристик створеної моделі (матриць та векторів, які описують простір стану, коефіцієнтів чисельника та знаменника передаточної функції тощо) можна використовувати такі функції:

- `tfdata` – отримання векторів чисельника та знаменника передаточної функції системи;

- ♦ `ssdata` – отримання матриць із рівнянь простору стану;
- ♦ `zpkdata` – отримання значень полюсів та нулів системи.

1.3 Перетворення моделей систем керування

В теоретичній частині було розглянуто декілька еквівалентних способів опису лінійних ланок. В пакеті Signal Processing є ряд функцій, призначених для перетворення опису з однієї форми в іншу. Назв цих функцій мають вигляд *xx2yy*, де *xx* – позначення початкової форми опису, а *yy* – позначення цільової форми опису ланки.

Необхідність в перетворенні опису часто виникає з-за того, що функції розрахунку ланок дають результат в однієї формі, а функція, наприклад, побудови частотної характеристики потребують завдання вхідних параметрів в іншої формі. Подальше розглянемо конкретні функції перетворення опису ланок. Для вхідних та вихідних параметрів використовуються наступні позначення:

1) функція передачі:
   - b – вектор-рядок коефіцієнтів (в порядку спадання степенів) чисельника функції передачі;
   - a – вектор-рядок коефіцієнтів (в порядку спадання степенів) знаменника функції передачі;

2) нулі та полюси:
   - z – вектор нулів (стовбець);
   - p – вектор полюсів (стовбець);
   - k – коефіцієнт посилення (скляр);

3) простір станів:
   - A – квадратна матриця зв’язку вектора стану та його похідної;
   - B – вектор-стовбець зв’язку вхідного сигналу та похідної вектора стану;
   - C – вектор-рядок зв’язку вихідного сигналу та вектора стану;

- D – скалярний коефіцієнт зв’язку вихідного та вхідного сигналів.

Функція tf2zp перетворює набори коефіцієнтів поліномів чисельника та знаменника функції передачі в вектори нулів та полюсів, розраховує також значення загального коефіцієнта посилення:

[z,p,k]=tf2zp(b,a);

Функція zp2tf є зворотною по відношенню до функції tf2zp: вона здійснює перетворення коефіцієнта посилення, а також векторів нулів та полюсів функції передачі в коефіцієнти поліномів її чисельника та знаменника:

[b,a]=zp2tf(z,p,k);

Функція ss2tf є зворотною по відношенню к функції zp2tf: вона перетворює параметри простору стану в коефіцієнти поліномів функції передачі ланок:

[b,a]=ss2tf(A,B,C,D);

Функція **zp2ss** перетворює нулі, полюси та коефіцієнти посилення ланки в її параметри простору стану:

[A,B,C,D]=zp2ss(z,p,k);

Функція ss2zp є зворотною по відношенню к функції zp2ss, перетворює парметри простору стану в нулі, полюси та коефіцієнти посилення ланки:

[z,p,k]=ss2zp(A,B,C,D);

Функція residue перетворює функцію передачі, що задана в вигляді коефіцієнтів поліномів чисельника та знаменника, в доданки простих дробів. Вона ж виконує зворотне перетворення. Ця функція відноситься до базової бібліотеки MATLAB.

При двох вхідних параметрах виконується розклад функції передачі на прості дроби:

[r,p,k]=residue(b,a);

Тут b та a – коефіцієнти поліномів чисельника та знаменника функції передачі відповідно. Вихідні параметри – вектори-стовпці полюсів (p) та відповідні їм винятків (r), а також рядка коефіцієнта цілої частини k.

При використанні трьох вхідних параметрів функції residue виконується перетворення винятків, полюсів ті коефіцієнти цілої частини в коефіцієнти чисельника та знаменника функції передачі, тобто виконується підсумовування простих дробів:

[b,a]= residue(r,p,k);

1.4 Попередження

При перетвореннях LTI-об'єктів необхідно мати на увазі наступне:

1. Три форми існування LTI-об′єктів не еквівалентні при чисельних розрахунках. Точність обчислень з передаточними функціями високих порядків часто буває незадовільною. Необхідно працювати переважно зі збалансованими моделями простору стану, а передаточні функції використовувати лише для відображення результатів моделювання.

2. Перетворення до формату передаточних функцій може супроводжуватися втратами точності. В результаті, полюси передаточної функції можуть помітно відрізнятися від полюсів початкової ZPK-моделі або моделі простору стану.

3. Перетворення в простір стану є неоднозначним у випадку одновимірної системи та не гарантують створення мінімальної конфігурації системи у випадку багатовимірної системи. Задана в просторі стану модель sys при перетвореннях ss(tf(sys)) може сформувати модель з іншими матрицями простору стану або навіть з іншим числом змінних стану в багатовимірному випадку. Таким чином, необхідно, по можливості, уникати перетворення моделей із одного формату в інший.

2 Порядок виконання роботи

2.1 Згідно свого варіанту взяти структурну схему системи автоматичного управління Додаток 1 та параметри цієї схеми Додаток 2.

2.2 Введіть передаточну функцію в вигляді поліномів за допомогою пакету Simulink та отримайте перехідну, імпульсну характеристики.

2.3 Введіть передаточну функцію в вигляді простору стану за допомогою пакету Simulink та отримайте перехідну, імпульсну характеристики.

2.4 Введіть передаточну функцію в вигляді нулів та полюсів за допомогою пакету Simulink та отримайте перехідну, імпульсну характеристики.

2.5 Введіть передаточну функцію в вигляді простих дробів за допомогою пакету Simulink та отримайте перехідну, імпульсну характеристики.

2.6 Введіть передаточну функцію в вигляді поліномів в Control System Toolbox та отримайте перехідну, імпульсну, ЛАЧХ та ЛФЧХ характеристики.

2.7 Введіть передаточну функцію в вигляді простору стану в Control System Toolbox та отримайте перехідну, імпульсну, ЛАЧХ та ЛФЧХ характеристики.

2.8 Введіть передаточну функцію в вигляді нулів та полюсів в Control System Toolbox та отримайте перехідну, імпульсну, ЛАЧХ та ЛФЧХ характеристики.

2.9 Введіть передаточну функцію в вигляді простих дробів в Control System Toolbox та отримайте перехідну, імпульсну, ЛАЧХ та ЛФЧХ характеристики.

2.10 Оцінити на стійкість системи автоматичного управління за перехідної характеристики та за ЛАЧХ, ЛФЧХ.

2.11 Порівняти отримані графіки характеристик отримані різними методами представлення передаточної функції.

3 Зміст звіту

3.1 Назва та мета роботи.

3.2 Структурна схема системи автоматичного управління згідно свого завдання.

3.3 Результат виконання моделі даної структурної схеми в Simulink та графіки характеристик.

3.4 Результат виконання моделі отриманої в Control System Toolbox та графіки характеристик.

3.5 Порівняння методів представлення передаточної функції.

3.6 Оцінювання на стійкість системи автоматичного управління.

3.7 Аналіз графіків характеристик, що отримали різними методами моделювання.

3.8 Висновки по роботі

4 Контрольні питання

4.1 Як ввести передаточну функцію в вигляді поліномів за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox?

4.2 Як ввести передаточну функцію в вигляді простору стану за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox?

4.3 Як ввести передаточну функцію в вигляді нулів та полюсів за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox?

4.4 Як ввести передаточну функцію в вигляді простих дробів за допомогою пакету Simulink та Control System Toolbox?

4.5 За допомогою яких команд можна передаточну функцію з одного вигляду перетворити в інший?

4.6 За допомогою яких команд можна отримати перехідну, імпульсну, ЛАЧХ та ЛФЧХ характеристики?

4.7 Як впливає перетворення моделей із одного формату в інший?